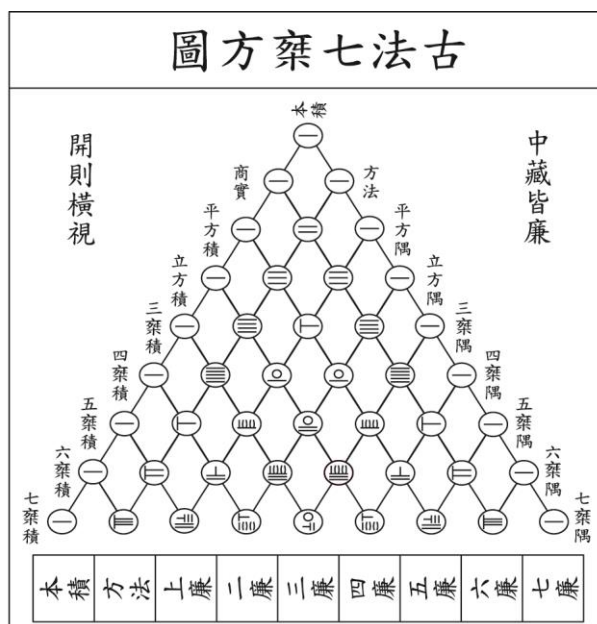
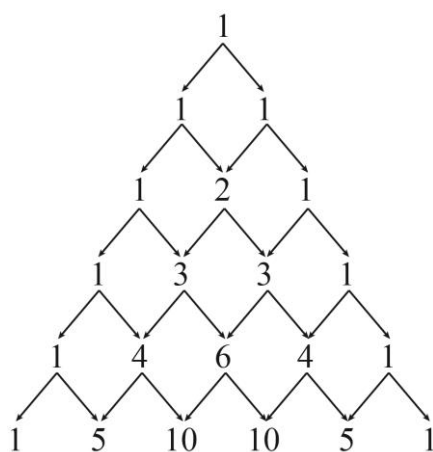


48 楊輝的魔術…二項式係數的奧妙

下圖是楊輝繪畫的「古法七乘方圖」，此圖每行數字左右對稱，由 1 開始逐漸變大，然後變小，回到 1，而且每個數字等於上一列的左右兩個數字之和，利用這個性質就可以寫出整個楊輝三角形。西方稱楊輝三角形為帕斯卡三角形。



將楊輝三角形中的數字用一般數字表示就是



根據規則，可以將楊輝三角形往下無限延伸。有許多跟楊輝三角形有關的有趣性質，例如研究每一行奇數（或偶數）出現的次數。又楊輝三角形中的數除了 1 之外，有越來越大的趨勢，所以每個大於 1 的正數都只會出現有限次，例如 6 僅在楊輝三角形中出現三次，但似乎還找不到恰好出現六次的數。

三角形不僅在幾何上扮演重要的角色，類似上圖的三角形數字圖也被楊輝及後來的數學家發現許多用處。這裡我們來玩一道倒三角形上的數字謎題：隨意選取 6 個數字排成一列，以選取

$$2, 3, -4, 5, -6, 4$$

這六個數字來說，將相鄰的兩個數字相加會得到五個數字，即

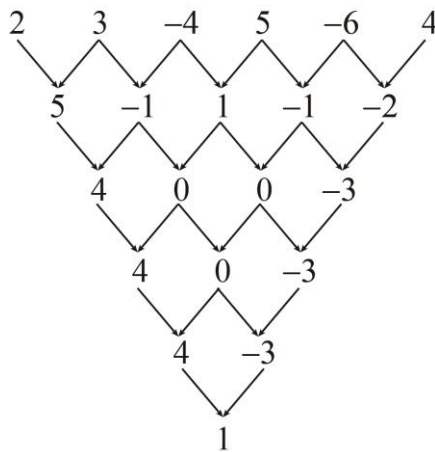
$5 = 2 + 3, -1 = 3 + (-4), 1 = (-4) + 5, -1 = 5 + (-6), -2 = (-6) + 4$ 這五個數字，將它們排成一列為

$$5, -1, 1, -1, -2.$$

再將相鄰的兩個數字相加，又會得到四個數字為

$$4, 0, 0, -3.$$

依照這樣的規律進行下去，在操作五次之後會得到一個數字。為了方便起見，把這五次操作寫成如下的倒三角形：

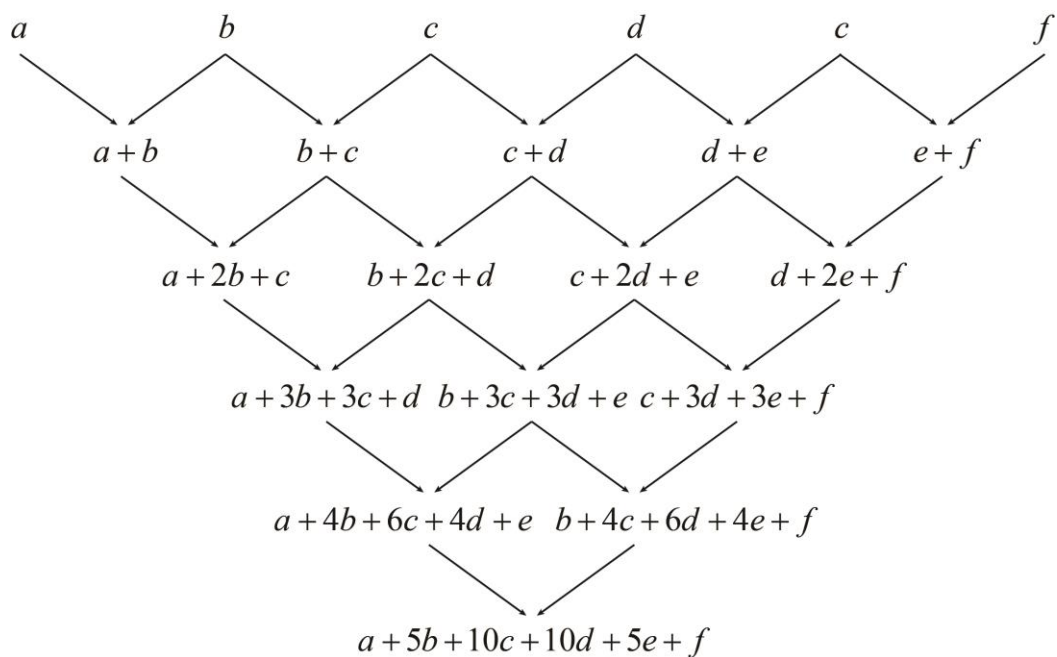


倒三角形最後的數字為 1，關於最後所得到的數字，可是個有趣的謎題：

老師叫學生在心裡想六個數字並依序寫在紙上(排成一列)，然後依照上述的操作模式，在五次操作後會得到一個數字。

老師說：「只要告訴我頭尾兩個數字，我便可以猜出最後那個數字除以 5 的餘數。」

設六個數為 a, b, c, d, e, f ，並圖示其五次操作如下：



我們發現最後所得到的數為

$$a + 5b + 10c + 10d + 5e + f.$$

因為 $5b + 10c + 10d + 5e$ 是 5 的倍數，所以 $a + 5b + 10c + 10d + 5e + f$ 除以 5 的餘數就是頭尾兩數相加除以 5 的餘數。